**1.1 Дифференциалдық теңдеулер туралы түсінік, олардың реті, жалпы және дербес шешімі, интегралы**

Мысалы: $y=\sin x$ функциясы $y''+y=0$ теңдеуінің шешімі бола ма?

Шешімі: берілген теңдеудегі у белгілі, демек $y''$-ті анықтауымыз қажет.

$y'=\cos x \Rightarrow y''=-\sin x$

$y''$, у-ті теңдікке қойсақ:

$-\sin x+\sin x=0$

$0=0$ теңдігіне келдік, демек $y=\sin x$ берілген теңдіктің шешімі болады.

Мысалы: $y=x^2(1+Ce^{\frac{1}{x}})$ функциясы берілсін, мұндағы С – кез келген тұрақты сан. у функциясы $x^2y'+(1-2x)y=x^2$ - бірінші ретті дифференциалдық теңдеуінің шешімі болатынын тексерелік.

Шешімі: Берілген функцияның бірінші ретті туындысын табсақ:

$$y'=2x(1+Ce^{\frac{1}{x}})+x^2(0+Ce^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}))=2x(1+Ce^{\frac{1}{x}})-Ce^{\frac{1}{x}}$$

у пен $y'$-ті теңдіктің сол жақ бөлігіне қойсақ:

$$x^2(2x(1+Ce^{\frac{1}{x}})-Ce^{\frac{1}{x}})+(1-2x)x^2(1+Ce^{\frac{1}{x}})=2x^3+2x^3Ce^{\frac{1}{x}}-Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2+Cx^2e^{\frac{1}{x}}-2x^3-$$

$$-2Cx^3e^{\frac{1}{x}}=x^2$$

$$x^2=x^2$$

тепе-теңдігіне келеміз, яғни берілген функцияның дифференциалдық теңдеудің шешімі және де кез келген бір С тұрақтысынан тұрғандықтан жалпы шешімі деп аталады.

Мысалы: $y=Ce^x-e^{-x}$ функциясы $xy''+2y'=xy$ -екінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі бола ма?

Шешімі: $y'$ пен $y''$- ті табамыз:

$y'=Ce^x+e^{-x} \Rightarrow y''=Ce^x-e^{-x}$

$y, y', y''$ - мәндерін теңдеуге қойсақ:

$x(Ce^x-e^{-x})+2(Ce^x+e^{-x})=x(Ce^x-e^{-x})$

$Cxe^x-xe^{-x}+2Ce^x+2e^{-x}=Cxe^x-xe^{-x}$

$Cxe^x-xe^{-x}+2Ce^x+2e^{-x}-Cxe^x+xe^{-x}=0 \Rightarrow 2(Ce^x+e^{-x})=0$

Демек, кез келген $2(Ce^x+e^{-x})\neq 0$ болғандықтан $y=Ce^x-e^{-x}$ функциясы берілген теңдеудің шешімі болмайды.

1.1.6 Анықтама: Дифференциалдық теңдеудің шешімін анықтау интегралдау есебі деп аталады.

Мысалы: $y''=x$

$$y'=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$y=\int(\frac{x^2}{2}+C_1)dx=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$$

Мысалы: $y=\frac{c_1}{x}+c_2$ функциясы $xy''+2y'=0$ - екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болатынын тексерелік.

Шешімі: $y'$, $y''$ - терді тауып теңдікке қоялық:

$$y'=\frac{-c_1}{x^2},\quad y''=\frac{2c_1x}{x^4}=\frac{2c_1}{x^3}$$

$$x\frac{2c_1}{x^3}-\frac{2c_1}{x^2}=0 \Rightarrow \quad \frac{2c_1}{x^2}-\frac{2c_1}{x^2}=0 \Rightarrow \quad 0=0$$

Ал (а) $y=\frac{1}{x}$, $(\partial)$ $y=-\frac{3}{x}+5$, (б) y=-1 функциялары мен $c_1$ мен $c_2$ -нің әртүрлі мәндеріндегі дербес интегралдары

(а) функциясында $c_1=1$, $c_2=0$

(ә) функциясында $c_1=3$, $c_2=5$

(б) функциясында $c_1=0$, $c_2=-1$ мәндеріне ие болған.

Мысалы: $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің $xe^y - y^2 = C$ жалпы интегралы.

1.1.10 Аудиториялық жұмыстар

у функциясының берілген дифференциалдық теңдеудің шешімі болатынын тексеріңіз, мұндағы $C, C_1, C_2$- кез келген тұрақты сан.

а) $y=Cx^2e^{1/x}$, $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$

ә) $y=\frac{1}{12}\left(x+C_1\right)^3+C_2$, $(y'')^2=y'$

б) $y=Ce^{-x^2}$, $y'+2xy=x\,e^{-x^2}$

в) $y=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2$, $y''=\frac{y'}{x}+x$

г) $y=C_1e^x+C_2-x-\frac{x^2}{2}$, $y''=y'+x$

д) $y=Cx^2+\frac{1}{x}$, $x^2dy+(3-2xy)dx=0$

е) $y=C_1x^2+C_2$, $xy''=y'$

ж) $y=C(1+x^2)$, $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$

1.1.11 Дербес үй жұмыстары

у функциясының берілген дифференциалдық теңдеудің шешімі болатынын тексеріңіз, мұндағы $C, C_1, C_2$- кез келген тұрақты сандар.

$a)$ $y=Ce^{\frac{1}{x}}$, $x^2y'+(1-2x)y=x^2$

$y=\frac{1}{10}\sin 2x-\frac{1}{20}\cos 2x-\frac{C_1}{4}e^{-4x}+C_2$, $y''+4y'=\cos 2x$

$\partial)$ $y=xe^{cx}$, $y'x=(1+\ln y-\ln x)y$

$y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-3x$, $y''+y'=2x-1$

á) $y=C(x+1)$, $y-xy'=1+x^2y'$

$y=-\frac{x^2}{4}+C_1\ln x+C_2$, $x(y''+1)+y'=0$

â) $y=Ce^{-2x}$, $y'+2e^xy=2e^{-x}$

$y=2x+C_1\sin x+C_2$, $y''ctgx+y'=2$

ã) $y=Cx+e^x$, $xy'-y+e^x=0$

$y=C_1\ln+\frac{1}{9x^3}+C_2$, $x^5y''+x^4y'=1$

ä) $y=\frac{2+Cx}{1+2x}$, $2(1+x^2y')=y-xy'$

$y=C_1(x-\frac{\sin 2x}{2})+C_2$, $y''tgx=2y'$

å) $y=Ce^{tgx}$, $y'\cos^3x=y$

$y=C_1\ln x+\frac{1}{x}+C_2$, $x^3y''+x^2y'=1$

æ) $y=C\sqrt{x^2-1}$, $(x^2-1)y'-xy=0$

$y=C_1\cos x-x+C_2$, $y''tgx=y'+1$

ç) $y=Cx^2$, $x^2y'-2xy=3y$

$y=(C_1+C_2x+x^3)e^x$, $y''-2y'+6y=6xe^x$

è) $y=Ce^{-2x}+2x-1$, $y'+2y=4x$

$y=C_1\cos x+C_2\sin x$, $y''+y=0$

**2.1 Айнымалылары ажыратылатын және ажыратылған бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер**

Мысалы: $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: берілгені 1-ші ретті айнымалылары ажыратылатын теңдеу. Көпмүшеге жіктесек $x(y^2+1)dx+y(1-x^2)dy=0$ теңдеу (6) түріне келеді. Мүшелеп $(1-x^2)$ $(y^2+1)$-ге бөлсек

$\frac{x}{1-x^2}dx+\frac{y}{y+1^2}dy=0$ теңдеу (7) түріне келеді. Енді мүшелеп интегралдаймыз

$$\int\frac{x}{1-x^2}dx+\int\frac{y}{1+y^2}dy=\int 0$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}=\frac{1}{2}\ln C \quad / \quad *2$$

$$-\ln\left|1-x^2\right|+\ln\left|1+y^2\right|=\ln C$$

Демек, $\ln\left|\frac{1+y^2}{1-x^2}\right|=\ln\left|C\right|\Rightarrow 1+y^2=C(1-x^2)$ -жалпы шешімі.

$$y=\pm\sqrt{C(1-x^2)-1}$$

Мысалы. $yy'=\frac{1-2x}{y}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы интегралын анықтайық.

Шешімі:

$y'=\frac{dy}{dx}$ екенін біле отырып

$y\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x}{y}$ деп жазамыз.

Теңдеудің екі бөлігін де $ydx$ -ке көбейтеміз:

$$y\frac{dy}{dx}\cdot ydx=\frac{1-2x}{y}\cdot ydx$$

$$y^2dy=(1-2x)dx$$

Мүшелеп интегралдайық:

$$\int y^2dy=\int(1-2x)dx$$

$$\frac{y^3}{3}=x-x^2+C$$ -жалпы интегралы.

$$C=\frac{y^3}{3}+x^2-x$$

Мысалы. $y'\,Sinx=ylny$, $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ Коши есебінің шешімін анықтаңыз.

Шешімі:

а) жалпы шешімін ізделік:

$$Sinx\frac{dy}{dx}=y\ln y$$

$$Sinxdy=y\ln ydx$$

Теңдеудің екі бөлігін де $Sinx\cdot y\ln y\neq 0$ бөлелік:

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{Sinx}$$

Мүшелеп интегралдайық

$$\int\frac{d(\ln y)}{\ln y}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\ln C$$

$$\ln|\ln y|=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\ln C$$

$$\ln y=tg\frac{x}{2}\cdot C$$

$$y=e^{c\cdot tg\frac{x}{2}}$$ - жалпы шешімі.

ә) С тұрақтысын анықтайық. Ол үшін берілген бастапқы $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ шартын қолданамыз. Шарттың берілгендерін табылған жалпы шешімге қоямыз. Сонда

$$e=e^{c\cdot tg\frac{\pi}{4}}$$

-тұрақтының мәні.

б) $e=e^{c}\Rightarrow c=1$ ізделінді c=1 тұрақтысын жалпы шешімдегі орнына енгізе отырып

$y=e^{tg\frac{x}{2}}$ -дербес шешімге ие боламыз.

2.1.2 Аудиториялық жұмыстар

Теңдеу түрін анықтап, жалпы интегралын немесе жалпы шешімін және бастапқы шарт берілгендері үшін оны қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

а) $xyy'=1-x^2$ (жауабы: $x^2+y^2=\ln Cx^2$)

ә) $\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$ (жауабы: $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C$)

б) $y'tqx-y=a$ (жауабы: $y=C\sin x-a$)

в) $y'+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0$ (жауабы: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$)

г) $xy'+y=y^2$ (жауабы: $Cx=(y-1)/y$)

д) $e^{-s}(1+\dfrac{ds}{dt})=1$ (жауабы: $e^t=C(1-e^{-s})$)

е) $y'=10^{x+y}$ (жауабы: $10^x+10^{-y}=C$)

ж) $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}$ (жауабы: $\ln\left|tq\dfrac{y}{4}\right|=C-2\sin\dfrac{x}{2}$)

з) $y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$; $y\big|_{x=0}=1$ (жауабы: $y=(1+x)/(1-x)$)

и) $\sin y\cos x\,dx=\cos y\sin x\,dx$; $y\Big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$ (жауабы: $\cos x=\sqrt{2}\cos y$)

2.1.3 Дербес үй жұмыстары

Айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеулерге есептер.
Теңдеу түрін анықтап, жалпы интегралын немесе жалпы шешімін және бастапқы шарт берілгендері үшін оны қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз:

а) $(x+1)^3dx-(y-2)^2\,dx=0$;
$y-xy'=b(1+x^2y')$; $y\big|_{x=1}=1$

ә) $\sec^2x\sec y\,dx=-ctgx\sin y\,dy$
$y'=2\sqrt{y}\ln x$, y(e)=1

б) $(\sqrt{xy}+\sqrt{x})y'-y=0$
$xy'+y=y^2$, y(1)=1/2

в) $2^{x+y}+3^{x-2y}y'=0$
$(1+e^x)y\cdot y'=e^y$, y(0)= 0

г) $20x\,dx-3y\,dy=3x^2y\,dy-5xy^2dx$
$y'ctgx+y=0$, y(0)= -1

д) $y'=(1+y^2)/(1+x^2)$
$(x^2-1)y'+2xy^2=0$, y(0)=1

е) $x^2y'+y=0$
$(a^2+y^2)dx+2x\sqrt{ax-x^2}dy=0$, (a)=0

ж) $y-xy'=a(1+x^2y')$
$(x+2y)y'=1$, y(0)= -1

з) $x+xy+yy'(1+x)=0$
$(1+e^{2x})y^2dy-e^xdx=0$, y(0)=1

и) $\sin x\sin y\,dx+\cos x\cos y\,dy=0$
$(1+x^2)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy$, y(0)=1

## 2.2 Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер

Мысалы: Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $x\,dy=(x+y)dx$

Шешімі: Берілген теңдікті $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ түріне келтіреміз

$$x\frac{dy}{dx}=(x+y)dx\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x}\Rightarrow y'=1+\frac{y}{x}$$

$\dfrac{y}{x}=u,\ y'=u'x+u$ ауыстыруын соңғы теңдікке қойсақ:

$u'x+u=1+u$
$u'x=1$ / : x

$$u'=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\Rightarrow\int du=\int\frac{dx}{x}$$

$$u=\ln|x|+\ln C$$

$$u=\ln|Cx|\Rightarrow u=Cx\Rightarrow e^u=Cx\Rightarrow x=\frac{e^u}{C}\Rightarrow x=\frac{e^{\frac{y}{x}}}{C}$$

- жалпы шешімі.

<u>Мысалы:</u> Коши есебін шешіңіз:

$$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+xdy=0,\quad y/_{x=2}=4$$

<u>Шешімі</u>: а) Жалпы шешімін ізделік:

$$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=xdy\ \ /:xdx$$

$$\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{dy}{dx}$$

(10) ауыстыруын соңғы теңдікке қоялық

$$u+\sqrt{1+u^2}=u'x+u$$

$$\sqrt{1+u^2}=u'x$$

$$\sqrt{1+u^2}=x\cdot\frac{du}{dx}\Bigg|\cdot\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+u^2}}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$ мұнда интегралдар кестесінен білу қажеттігін ескертеміз

$$\left|\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C\ \right|$$

$$\ln|x|=\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|+\ln|C|$$

$$x=\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)C$$

$$x=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}C$$

$$\frac{x^2}{C}=y+\sqrt{x^2+y^2}$$ - жалпы шешімі

ә) x=3, y=4 екенін біле отырып С-тұрақтысын есептелік

$$\frac{9}{C}=4+\sqrt{9+16}\Rightarrow\frac{y}{C}=9\Rightarrow C=1$$

б) Анықталған С тұрақтысын жалпы шешімге қойсақ:

$$x^2=y+\sqrt{x^2+y^2}$$ - дербес шешімі.

2.2.2 Аудиториялық жұмыстар

Теңдеудің түрін анықтап, жалпы шешімін (интегралын) және дербес шешімін табыңыз:

а) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2$ (жауабы: $\dfrac{y-2x}{y+x}=Cx^3$)

$\left(y^2-3x^2\right)dy+2xydx=0$ ; $y/_{x=0}=1$ (жауабы: $y^2-x^2=y^3$)

ә) $y^2+x^2y'=xy\ \ y'$ (жауабы: $y=C_1\cdot e^{\frac{y}{x}}$)

xdy-ydx=ydy , y(-1)=1 (жауабы: $x=-y\left(1+\ln|y|\right)$)

б) $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y}{x}}$ (жауабы: $x = C_1 \cdot e^{2\sqrt{\frac{y}{x}}}$ )

$2x^2 y' = x^2 + y^2$ ; $y/_{x=1}=0$ (жауабы: $y = x - \dfrac{x}{1 + \ln\sqrt{|x|}}$ )

в) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ (жауабы:$x^2+y^2=Cy$)

$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ $y/_{x=0}=1$ (жауабы: $x^2=0$ және $x^2=4-4y$)

г) x $y' = yLn\dfrac{y}{x}$ (жауабы:$y=xe^{1+Cx}$)

$(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)d$; $y/_{x=1}=0$ (жауабы: $(x+y)^2=x^3e^{1-x/(x+y)}$)

2.2.3 Дербес үй жұмыстары

Теңдеудің түрін анықтап, жалпы шешімін (интегралын) дербес шешімін табыңыз:

а) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

$y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2,$ $y/_{x=1}=0$

ә) $y - xy' = y\ln\dfrac{x}{y}$

$3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 10,$ $y/_{x=1}=0$

б) $xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$

$(x + 7y)dx - xdy = 0,$ $y/_{x=1}=0$

в) $y^2 + x^2 y' = xyy'$

$8xdy = (x + y)dx,$ $y/_{x=1}=0$

г) $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$

$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$ , $y/_{x=1}=1$

д) $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$

$y' = \dfrac{xy + y^2}{2x^2 + xy};$ $y/_{x=1}=0$

е) $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$

$y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 3$ , $y/_{x=1}=0$

ж) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

$y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$ , $y/_{x=0}=\sqrt{5}$

з) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$

$(xy' - y)arctg\dfrac{y}{x} = x$ , $y/_{x=1}=0$

и) $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$

$y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$, $y/_{x=0}=\sqrt{5}$

### 2.3 Толық дифференциалдық теңдеулер

Мысалы: $(e^x+y+Siny)dx+(e^y+x+xCosy)dy=0$ толық дифференциалды теңдеуін шешіңіз.

Бірінші әдіс: Коэффиценттерді белгілеп, шартының орындалуын тексерелік:

$P(x,y)=e^x+y+Siny$ және $Q(x,y)=e^y+x+xCosy$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(e^x+y+Siny)'_y\Big|_{x=const}=0+1+Cosy=1+Cosy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(e^y+x+xCosy)'_x\Big|_{y=const}=0+1+Cosy=1+Cosy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad\Rightarrow$$ берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу.

$U(x,y)=C$ жалпы интегралын іздейік.

$U(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)=\int(e^x+y+Siny)dx+\varphi(y)=e^x+yx+xSiny+\varphi(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(e^x+yx+xSiny+\varphi(y))'_y\Big|_{x=const}=0+x+xCosy+\varphi'(y)$$

$x+xCosy+\varphi'(y)=Q(x,y)$

$x+xCosy+\varphi'(y)=e^y+x+xCosy$

$\varphi'(y)=e^y$

$\varphi(y)=\int e^ydy=e^y+c_1$

$U(x,y)=e^x+xy+xSiny+e^y+c_1$

$e^x+yx+xSiny+e^y+c_1=c_2$

$e^x+yx+xSiny+e^y=C$ – жалпы интегралы.

Екінші әдіс: $U(x,y)$ функциясының сондай-ақ

$$U=\int_{xo}^{x}P(x,y)dx+\int_{yo}^{y}Q(x_o,y)dy$$

немесе (16)

$$U=\int_{xo}^{x}P(x,y_o)dx+\int_{yo}^{y}Q(x,y)dy$$

өрнектері арқылы есептеуге болады.

Мұндағы $x_o,y_o-P(x,y),\ Q(x,y)$ функцияның аныкталу облыстарына тиісті сандар.

$$(e^x+y+Siny)dx+(e^y+x+xCosy)dy=o$$

теңдеуін 2-ші әдіспен шешіп көрейік:

$P(x,y)=e^x+y+Siny \qquad Q(x,y)=e^y+x+xCosy$

$x_o=o \quad y_o=1$

$$U=\int_{xo}^{x}P(x,y)dx+\int_{yo}^{y}Q(x,y)dy=\int_{o}^{x}(e^x+1+Sin1)dx+\int_{1}^{y}(e^y+x+xCosy)dy=c$$

$$(e^x+x+xSin1)\Big|_o^x+(e^y+xy+xSiny)\Big|_1^y=C_1$$

$$(e^x+x+xSin1)-(e^o+o+oSin1)+(e^y+xy+xSiny)-(e^1+x+xSin1)=c_1$$

$$e^x+x+xSin1-1+e^y+xy+xSiny-e-x-xSin1=c_1$$

$$e^x+e^y+xy+xSiny=\underbrace{c_1+1+e}$$

$e^x+e^y+xy+xSiny=C$ - жалпы шешімі

Үшінші әдіс: Бірінші ретті толық дифференциалық теңдеулерге келтірілетін теңдеулер. $\frac{\partial p}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ болғанда кейбір жағдайда (11) теңдеуін толық дифференциалдық теңдеулерге келтіруге болады.

Бұл үшін интегралдаушы көбейткіш $M(x,y)$ деп аталатын функцияларға көбейту қажет.

1) $$\frac{\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

функциясы тек x-тен тәуелді болса:

$$M = e^{\int \left( \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \right) dx} \qquad (17)$$

2) $\dfrac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{p}$ функциясы тек y-тен тәуелді болса:

$$M = e^{\int \left( \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{P} \right) dy} \qquad (18)$$

түрінде алынады.

<u>Мысалы:</u> $ydx - xdy + Ln\ xdx = 0$

$$(y + Lnx)dx - xdy = 0$$

$$P(x, y) = y + Lnx \qquad Q(x, y) = -x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = (y + Lnx)'_y\ I_{x=const} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (-x)'_{y=const} = -1$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\dfrac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \dfrac{1+1}{-x} = -\dfrac{2}{x}$ -тек x-тен тәуелді, демек (17) өрнегімен интегралдаушы көбейткішті табамыз:

$$м = e^{\int \left( -\frac{2}{x} \right) dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$M = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2}(y + \ln x)dx - x\frac{1}{x^2}dy = 0$$

$$\underbrace{\left( \frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} \right)}_{P_1} dx - \underbrace{\frac{1}{x}}_{Q_1} dy = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$

$$U(x, y) = \int P_1(x, y)dx + \varphi(y) = \int \left( \frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} \right) dx + \varphi(y) = -\frac{y}{x} + \int \frac{\ln x}{x^2}dx + \varphi(y) = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} \\ v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\ln x + \int \frac{dx}{x^2} + \varphi(y) = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left( -\frac{y}{x}\ln x - \frac{1}{x} + \varphi(y) \right)'_y \Big|_{x=const} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{x}+\varphi'(y)=Q_1(x,y)$$

$$-\frac{1}{x}+\varphi'(y)=-\frac{1}{x}\Rightarrow \varphi'(y)=0\Rightarrow \varphi(y)=c_1$$

$$U(x,y)=-\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+c_1=c_2\Rightarrow \frac{y}{x}+\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}=C$$

y+lnx+1=cx жалпы шешімі

2.3.2 Аудиториялық жұмыстар

Берілген теңдеулер түрлерін анықтап, оның шешілуін екі әдіспен де көрсетіңіз.

а) $\left(\frac{y^2+\sin 2x}{y}+1\right)dx-\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}-x\right)dy=0$ Жауабы: $x(1+y)+\frac{\sin^2 x}{y}=C$

ә) $\left(2x+ye^{xy}\right)dx+\left(1+xe^{xy}\right)dy=0$ Жауабы: $x^2+y+e^{xy}=C$

б) $\sin(x+y)dx+x\cos(x+y)(dx+dy)=0$ Жауабы: $x\sin(x+y)=C$

в) $\frac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy=0$ Жауабы: $4y\ln x+y^4=C$

г) $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0$ Жауабы: $x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}=C$

Төмендегі теңдеулердің интегралдаушы көбейткішін тауып, кейіннен жалпы шешуін табыңыз.

а) $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xydy=0$ Жауабы: $M=\frac{1}{x^4};\ y^2=Cx^3+x^2$

ә) $\left(\sin x+e^y\right)dx+\cos xdy=0$ Жауабы: $M=e^{-y};\ e^{-y}\cos x=C+x$

б) $\left(x\sin y+y\right)dx+\left(x^2\cos y+x\ln x\right)dy=0$ Жауабы: $M=\frac{1}{x};\ x\sin y+y\ln x=C$

в) $\left(x^2-y\right)dx+xdy=0$ Жауабы: $M=\frac{1}{x^2};\ x+\frac{y}{x}=C$

г) $2xtgydx+\left(x^2-\sin y\right)dy=0$ Жауабы: $M=\cos y;\ x^2\sin y+\frac{1}{2}\cos 2y=C$

2.3.3 Дербес үй жұмыстары

Берілген теңдеулер түрлерін анықтап, оның шешілуін екі әдіспен де көрсетіңіз.

а) $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy$ Жауабы: $x^3+x^3\ln y-y^2=C$

ә) $\left(2x^2y^2+7\right)dx+2x^3ydy=0$ Жауабы: $x^3y^2+7x=C$

б) $\left(e^y+ye^x+3\right)dx=\left(2-xe^y-e^x\right)dy$ Жауабы: $xe^y+ye^x+3x-2y=C$

в) $\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx=\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy$ Жауабы: $x^3y+x^2-y^2=Cxy$

г) $\frac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$ Жауабы: $x+arctg\frac{y}{x}=C$

д) $\left(2x^3-xy^2\right)dx+\left(2y^3-x^2y\right)dy=0$ Жауабы: $x^4-x^2y^2+y^4=C$

е) $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$ Жауабы: $xe^y-y^2=C$

ж) $yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy=0$ Жауабы: $x^y=C$

з) $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{ydx-xdy}{x^2}dx$ Жауабы: $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$

и) $(1+x\sqrt{x^2+y^2})dx+(-1+\sqrt{x^2+y^2})ydy=0$ Жауабы: $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-\frac{1}{2}y^2=C$

Төмендегі теңдеулердің интегралдаушы көбейткішін тауып, кейіннен жалпы шешуін табыңыз.

а) $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$ Жауабы: $\frac{y^2}{2}+\frac{\ln x}{y}=C$

ә) $y(1+xy)dx-xdy=0$ Жауабы: $x^2+\frac{2x}{y}=C$

б) $(e^{2x}-y^2)dx+ydy=0$ Жауабы: $M=e^{-2x};\ y^2=(C-2x)e^{2x}$

в) $(1+3x^2\sin y)dx-xctgydy=0$ Жауабы: $M=\frac{1}{\sin y};\ \frac{x}{\sin y}+x^3=C$

г) $y^2dx+(yx-1)dy=0$ Жауабы: $M=\frac{1}{y};\ xy-\ln y=C$

д) $(x^2+y)dx-xdy=0$ Жауабы: $M=\frac{1}{x^2};\ x-\frac{y}{x}=C$

е) $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$ Жауабы: $(x^2+y^2)e^x=C$

ж) $(x\mathrm{COS}y-y\mathrm{Sin}y)dy+(x\mathrm{Sin}y+y\mathrm{Cos}y)dx=0$ Жауабы: $(x\mathrm{Sin}y+y\mathrm{Cos}y-\mathrm{Sin}y)e^x=C$

### 2.4 Бірінші ретті сызықтық дифференциалды теңдеулер

<u>Мысалы:</u> $y'-\frac{y}{x}=-\frac{2}{x^2}$

Мұндағы $P(x)=-\frac{1}{x}$, $Q(x)=-\frac{2}{x^2}$

(22´) алмастыруын берілген теңдеуге қоялық:

$$\underbrace{u'v+uv'-\frac{uv}{x}}=-\frac{2}{x^2}$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=-\frac{2}{x^2}$$

Екі айнымаларымен ажыратылатын теңдеулерге келтіреміз:

$$\begin{cases} v'-\frac{v}{x}=0 & \text{(а)} \\ & \text{(б)} \\ u'v=-\frac{2}{x^2} & \text{(а)} \end{cases}$$

(б)

$$v'=\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}\qquad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|\Rightarrow\quad v=x$$

$$u'x=-\frac{2}{x^2}$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{2}{x^3}$$

$$du=-\frac{2}{x^3}dx\qquad u=-2\int x^{-3}dx=-2\frac{x^{-2}}{-2}+c=\frac{1}{x^2}+c$$

$$u=\frac{1}{x^2}+c$$

$y = uv = (\frac{1}{x^2} + c)x$ - жалпы шешімі.

<u>2-әдіс:</u> Еркін тұрақтыны вариациалауды қолдану.

Жоғарыдағы $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$ мысалын қарастыралық.

$y' - \frac{y}{x} = 0$ біртекті теңдеу түріне келтіреміз.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$y = xc$$

Мұндағы c=c(x) деп белгілейік:

$$y = c(x)x$$

$$y' = c'(x)x + c(x)$$

Берілген бастапқы теңдеуге қойсақ:

$$c'(x)x + c(x) - \frac{c(x)x}{x} = -\frac{2}{x^2}$$

$$c'(x)x = -\frac{2}{x^2}$$

$$c'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$c(x) = -2\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{2x^{-2}}{-2} + c_1 = x^{-2} + c_1 = \frac{1}{x^2} + c_1$$

$$c(x) = \frac{1}{x_2} + c_1$$

$y = \mathrm{x}(\frac{1}{\mathrm{x}^2} + c_1)$ -жалпы шешім.

<u>3-әдіс:</u> Берулли теңдеуін шешу жолына тоқталайық.

<u>Мысалы:</u> $xy + y = xy^2 \; / : x$

$$y' + \frac{y}{x} = y^2$$

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = 1, \quad n = 2.$$

$$z = y^{1-n} \Rightarrow z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow z = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z}$$

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

$$z' + (1-2)\frac{1}{x}z = (1-2)1$$

$z' - \frac{z}{x} = -1$ – сызықтық теңдеу.

$z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'$ алмастыруын теңдікке қоямыз:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -1$$

$$u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = -1$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0 & \text{(а)} \\ u'v = -1 & \text{(б)} \end{cases}$$

(а) $\Rightarrow v' = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow v = x$

(б) $\Rightarrow u'v = -1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \int du = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow u = -\ln x + c \Rightarrow$

$u = c - \ln x$ z=uv =x(c-ln x)

$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{x(c - \ln x)}$ – жалпы шешімі.

2.4.3 Аудиториялық жұмыстар

Сызықтық теңдеулерді екі әдіспен шешіңіз:

а) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ жауабы: $y = Cx^2 e^{1/x} + x^2$

ә) $y' + 2xy = x e^{-x^2}$ жауабы: $y = e^{-x^2}(C + x^2/2)$

б) $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$ жауабы: $x = y\ln y + C/y$

в) $y' + ay = e^{mx}$ жауабы: $y = \begin{cases} Ce^{-ax} + \dfrac{e^{mx}}{m+a}, & \text{егер } m \neq -a \\ (C + x)e^{mx}, & \text{егер } m = -a \end{cases}$

г) $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$ жауабы: $y^2 - 2x = Cy^3$

д) $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$ жауабы: $y = e^x(\ln|x| + x^2/2) + Ce^x$

Бернулли теңдеуін шешіңіз:

а) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$ жауабы: $y = 1/(1+x)[C + \ln|1+x|]$

ә) $y^{n-1}(ay' + y) = x$ жауабы: $ny^n = Ce^{-nx/a} + nx - a$

б) $xdx = (\frac{x^2}{y} - y^3 dy)$ жауабы: $x^2 = y^2(C - y^2)$

в) $y' - ytgx + y^2 Cosx = 0$ жауабы: $y(x + C) = Secx$

г) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{COS^2 x}$ жауабы: $y = (\frac{C + \ln|COSx|}{x} + tgx)^2$

д) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ жауабы: $y = \frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$

2.4.4 Дербес үй жұмыстары

Сызықтық теңдеулерді екі әдіспен шешіңіз:

а) $y'+2xy=2x^2 e^{-x^2}$
ә) $y'+2y=4x$
б) $y'+ y =\cos x$
в) $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$
г) $y'-y\ \mathrm{ctg}\ x=\sin x$
д) $x'-\dfrac{3x}{y}=\dfrac{1+\ln y}{y}$
е) $y'+\dfrac{2x-5}{x^2}\ y=5$
ж) $y'-\dfrac{y}{x+2}=e^x(x+1)$

з) $y'-\cos x\ y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$
и) $y' -3x^2y=\dfrac{x^2-(1+x^3)}{3}$

Бернулли теңдеуін шешіңіз:
а) $y'+2xy=2x^3y^3$
ә) $x'-\dfrac{1}{y}x=-\dfrac{y}{x}$
б) $xy'+y=y^2\ln x$
в) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x^2}y^{-2}$
г) $y'+xy=e^x(x-1)y^2$

д) $y'+\mathrm{tg}x\ y=-\dfrac{2}{3}\ \mathrm{Sin}xy^4$
е) $2(y'+xy)=e^x(x-2)y^2$

ж) $4y'+x^3y=e^{-2x}(8+x^3)y^2$
з) $y'-y=2xy^2$
и) $2xy'-3y=-(5x^2+3)y^3$

**3.1 Кейбір реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер**

Мысалы: $y^{IV}=\cos^2 x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз:

Шешімі:теңдеудің екі бөлігін dx-ке көбейтіп интегралдайық:

$$y'''=\int\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}(x+\frac{\sin 2x}{2})+c_1$$

сол әрекетті қайталап:

$$y'=\int(\frac{x^2}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+c_1x+c_2)dx=\frac{x^3}{12}-\frac{\sin 2x}{16}+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3$$

$$y=\int(\frac{x^3}{12}-\frac{\sin 2x}{16}+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3)dx=\frac{x^4}{48}+\frac{\cos 2x}{32}+c_1\frac{x^3}{6}+c_2\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4$$

Жауабы: $y=\dfrac{x^4}{48}+\dfrac{\cos 2x}{32}+\dfrac{c_1x^3}{6}+c_2\dfrac{x^2}{2}+c_3x+c_4$ ізделінді жалпы шешімі.

3.1.2 Аудиториялық жұмыстар

Берілген теңдеулердің жалпы шешімдерін табыңдар:

а) $y''' = e^{2x}$ Жауабы: $y = \frac{e^{2x}}{8} + c_1x^2 + c_2x + c_3$

ә) $y'' = x\sin x$ Жауабы: $y = c_1x + c_2 - \sin x - 2\cos x$

б) $y'' = 3x^2;\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 1$ Жауабы: $4y = x^4 + 4x + 8$

в) $y'' = x + \sin x$ Жауабы: $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1x + c_2$

г) $y'' = \ln x$ Жауабы: $y = \frac{x^2}{2}\left[\ln x - \frac{2}{3}\right] + c_1x + c_2$

д) $y''' = \frac{1}{x}$ Жауабы: $y = x^2\ln\sqrt{x} + c_1x^2 + c_2x + c_3$

е) $y''' = \cos 2x$ Жауабы: $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + c_1x^2 + c_2x + c_3$

ж) $y'' = \frac{2}{x^3}$ Жауабы: $y = \frac{1}{x} + c_1x + c_2$

з) $y'' = arctgx$ Жауабы: $y'' = \frac{arctgx}{2}(x^2-1) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + c_1x + c_2$

и) $y'' = 3e^{\frac{x}{2}} + \cos 3x$ Жауабы: $y = 12e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{9}COS\ 3x + c_1x + c_2$

2) $F(x, y^{(\kappa)}, y^{(\kappa+1)},..., y^{(n)}) = 0$, у-қатыспаған жағдай (26)

$y^{(\kappa)} = z$ - ауыстыруы арқылы теңдеудің ретін төмендетуге болады.

$y^{(\kappa+1)} = z'$

$y^{(\kappa+2)} = z''$

.......... .......

$y^{n} = z^{(n-1)}$

Мысалы: $y'' = y' + x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз:

Шешімі: $y' = z,\quad y'' = z'$ ауыстыруын енгізсек: $z' - z = x$ - сызықтық теңдеу. Бұл теңдеу түрін шешуде $z = uv$, $z' = u'v + uv'$ белгіленуін пайдаланатынбыз; яғни осы берілгенді сызықтық теңдеуге қоямыз:

$u'v + uv' - uv = x$

$u'v + u(v' - v) = x$

$v' - v = 0 \quad (a)$ $\qquad$ $u'v = x \quad (б)$

$v' = v$ $\qquad$ $\frac{du}{dx}e^{x} = x$

$\frac{dv}{dx} = v \Big| * \frac{dx}{v}$ $\qquad$ $du = \frac{x}{e^{x}}dx$

$\int\frac{dv}{v} = dx$ $\qquad$ $\int du = \int xe^{-x}dx$

$\int\frac{dv}{v} = \int dx$ $\qquad$ $U = \begin{vmatrix} U_1 = x \\ dU_1 = dx \\ dv = e^{-x}dx \\ v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1$

Демек z=uv болғандықтан, әрі $z = y'$ екенін ескерсек:

$y' = (-xe^{-x} - e^{-x} + c_1)e^x = ((-x-1)e^{-x} + c_1)e^x = -x - 1 + c_1 e^x$

у-ті табу үшін екі бөлігін де интегралдау қажет:

$y = \int (-x - 1 + c_1 e^x)dx = -\frac{x^2}{2} - x + c_1 e^x + c_2$

Жауабы: $y = -\frac{x^2}{2} - x + c_1 e^x + c_2$

3.1.3 Аудиториялық жұмыстар

Берілген теңдеулердің жалпы шешімдерін табыңдар:

а) $xy'' = y'$ Жауабы: $y = c_1 x_2 + c_2$

ә) $y'' = y' + x$ Жауабы: $y = c_1 e^x + c_2 - x - \frac{x}{2}$

б) $y'' = \frac{y'}{x} + x$ Жауабы: $y = \frac{1}{3} x3 + c_1 x^2 + c_2$

в) $(1+x^2)\, y'' + (y')^2 + 1 = 0$ Жауабы: $y = (1+c_1^2)\ln|x + c_1| - c_1 x + c_2$

г) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ Жауабы: $y = (c_1 x - c_1^2)e^{\frac{x}{c_1}+1} + c_2$

3.1.4 Дербес үй жұмыстары

Берілген теңдеулердің жалпы немесе дербес шешімдерін табыңдар:

$а)\ y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1), \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -1$

$ә)\ y''(x^2+1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

$б)\ (x-3)y'' + y' = 0$

$в)\ x(y''+1) + y' = 0$

$г)\ y'' = \sqrt{1-(y')^2}$

$д)\ (y''x - y')y' = x^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$

$е)\ y'' = \frac{y'}{x} + x$

$ж)\ (1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$

$з)\ xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

$и)\ y'' = y' + x$

3) $f(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, (27)

х- қатыспаған жағдай

$y' = z$ ауыстыруын енгіземіз, келесі туындылардың табылу реті:

$y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz : dy}{dx : dy} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = y' \frac{dz}{dz} = z\frac{dz}{dy}$

$y''' = z(z\frac{d^2 z}{d^2 y} + (\frac{dz}{dy})^2)$ т.с.с. жалғасады.

<u>Мысалы:</u> $(y')^2 + 2yy'' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

<u>Шешімі:</u>

$y' = z, \ y'' = zz'$ ауыстыруын берілген теңдікке қойсақ:

$z^2 + 2yzz' = 0$

$2yzz' = -z^2$

$2yz\frac{dz}{dy} = -z^2 \Big| * \frac{dy}{2yz^2}$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{d\ y}{2y}$$

$$\ln z = -\frac{1}{2}\ln y + \ln c_1$$ екенін ескерсек

$$z = c_1 y^{-\frac{1}{2}}\ ,\ z = y'$$

$$y' = c_1 y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 y^{-\frac{1}{2}} \Bigg| * \frac{dx}{y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\int y^{\frac{1}{2}} dy = c_1 \int dx$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = c_1 (x + c_2)$$

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} c_1 (x + c_2)$$

$$y = \left(\frac{3}{2} c_1\right)^{\frac{2}{3}} (\tilde{o} + c_2)^{\frac{2}{3}}$$

$$y = c(x + c_2)^{\frac{2}{3}}$$ - ізделінді жалпы шешімі

### 3.1.5 Аудиториялық жұмыстар

Берілген теңдеулердің жалпы шешімдерін табыңыз:

а) $(y'')^2 = y'$ Жауабы: $y = \frac{1}{12}(x+c_1)^3 + c_2$

ә) $1+(y')^2 = 2y\,y'$ Жауабы: $(x+c_2)^2 = 4c_1(y-c_1)$

б) $(y')^2 + 2y\,y'' = 0$ Жауабы: $y = c_1(x+c_2)$

в) $a^2 y'' - y = 0$ Жауабы: $y = c_1 e + c_2 e$

г) $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$ Жауабы: $x = \frac{4}{3}(y - 2c_1)\sqrt{y + c_1} + c_2$

д) $yy'' + (y')^2 = 1$ Жауабы: $(x+c_2)^2 - y^2 = c_1$

е) $yy'' = (y')^2$ Жауабы: $y = c_1 e^{c2x}$

ж) $y(1-\ln y)\,y'' + (1+\ln y)(y')^2 = 0$ Жауабы: $(x+c_2)\ln y = x + c_1$

з) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$ Жауабы: $y\cos^2(x+c_1) = c_2$

### 3.1.6 Дербес үй жұмыстары

Берілген теңдеулердің жалпы/ дербес шешімдерін табыңыз

à) $1 + (y')^2 = 2yy''$

∂) $yy'' - (y')^2 = y^3,\quad y(0) = -\frac{1}{2},\quad y'(0) = 0$

á) $y'' + ay = b$

â) $yy'' - (y')^2 = y^4$

ã) $2y(y')^3 + y'' = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = -3$

ä) $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$

å) $(y')^2 - yy'' = 1$

æ) $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$

ç) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$

è) $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$

4) $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$ (28)

$y$, $y'$, $y''$, ... туындыларына қарағанда біртекті теңдеу берілген жағдайда $yy'=p$, $(y')^2=p$, $xy'=p$, $\frac{y'}{y}=p$ ауыстыруларының көмегімен теңдеуді ықшамды түрге келтіруге тырысу қажет. Мұндай жағдайда қарапайым түрлендірулер жасап толық туынды болатындығына көз жеткізуіміз қажет.

Мысалы: $yy''-(y')^2=0$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $y^2$-қа бөлсек

$$\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2=0$$

$$\frac{y'}{y}=p \Rightarrow p'=\frac{y''y-y'y'}{y^2}=\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2,$$

$$p'=0 \Rightarrow p=c_1 \Rightarrow \frac{y'}{y}=c_1$$

$$\frac{dy}{ydx}=c_1 \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=c_1\int dx \Rightarrow \ln|y|=c_1x+c_2$$

Жауабы: $y=e^{c_1x+c_2}$ - жалпы теңдеуі.

### 3.1.7 Аудиториялық жұмыстар

Келесі теңдеулердің жалпы шешімін табыңыз.

$\grave{a})\ xyy''+x(y')^2=3yy'$ Жауабы: $y^2=c_1x^4+c_2$

$\partial)\ 26\ xy''=y'(e^y-1)$ Жауабы: $y=\ln|c_1x^{c1}/c_2-x^{c1}|$

$\acute{a})\ yy''+(y')^2=x$ Жауабы: $y=\sqrt{1/3x^3+c_1x+c_2}$

$\hat{a})\ y''+\frac{1}{x}y'-\frac{y}{x^2}=0$ Жауабы: $y=c_1x+c_2/x$

$\tilde{a})\ x^2y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2=0$ Жауабы: $y=c_1xe^{c2/x}$

д) $yy''=y'(2\sqrt{yy'}-y')$ Жауабы: $\ln|y+c_1|+c_1/y+c_1=x+c_2$

### 3.1.8 Дербес үй жұмыстары

Берілген бастапқы шарт бойынша дербес шешімін табыңыз:

а) $y''(x^2+1)=2xy'$ $\quad y\big|_{x=0}=1$ $\quad y'\big|_{x=0}=3$ Жауабы: $y=x^3+3x+1$

ә) $xy''+x(y')^2-y'=0$ $\quad y\big|_{x=2}=2$ $\quad y'\big|_{x=2}=1$ Жауабы: $x=2+\ln\frac{x^2}{4}$

б) $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$ $\quad y\big|_{x=2}=0$ $\quad y'\big|_{x=2}=4$ Жауабы: $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\frac{16}{5}$

в) $2y''=3y^2$ $\quad y\big|_{x=-2}=1$ $\quad y'\big|_{x=-2}=-1$ Жауабы: $y=\frac{4}{(x+4)^2}$

г) $yy''=(y')^2-(y')^3;$ $\quad y\big|_{x=1}=1$ $\quad y'\big|_{x=1}=-1$ Жауабы: $y-x=2\ln(y)$

д) $y^3y''=-1;$ $\quad y\big|_{x=1}=1$ $\quad y'\big|_{x=1}=0$ Жауабы: $y=\sqrt{2x-x^2}$

е) $y^4-y^3y''=1;$ $\quad y\big|_{x=0}=\sqrt{2}$ $\quad y'\big|_{x=0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Жауабы: $y=\sqrt{1+e^{2x}}$

ж) $y''=e^{2y}$ $\quad y\big|_{x=0}=0$ $\quad y'\big|_{x=0}=1$ Жауабы: $y=-\ln|1-x|$

з) $(y')=y''(y-1)$ $\quad y\big|_{x=1}=2$ $\quad y'\big|_{x=1}=-1$ Жауабы: $y=\frac{x+1}{x}$

и) $x^4y''=(y-xy')^3$ $\quad y\big|_{x=1}=1$ $\quad y'\big|_{x=1}=1$ Жауабы: $y=x$ $\quad y=ux$ ауыстыруын енгізіңіз к) $y'' = xy' + y + 1$ $\quad y\big|_{x=0} = 1 \quad y'\big|_{x=0} = 0$ $\quad$ Жауабы: $y = 2e^{\frac{1}{2}x^2 - 1}$

### 3.2 Жоғарғы ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Мысалы: $y^{IV} = \cos^2 x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз:

Шешімі:теңдеудің екі бөлігін dx-ке көбейтіп интегралдайық:

$$y''' = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}(x + \frac{\sin 2x}{2}) + c_1$$

сол әрекетті қайталап:

$$y' = \int (\frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c_1 x + c_2)dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$y = \int (\frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3)dx = \frac{x^4}{48} + \frac{\cos 2x}{32} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

Жауабы: $y = \frac{x^4}{48} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{c_1 x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$ ізделінді жалпы шешімі.

3.1.2 Аудиториялық жұмыстар

Берілген теңдеулердің жалпы шешімдерін табыңдар:

а) $y''' = e^{2x}$ $\quad$ Жауабы: $y = \frac{e^{2x}}{8} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

ә) $y'' = x\sin x$ $\quad$ Жауабы: $y = c_1 x + c_2 - \sin x - 2\cos x$

б) $y'' = 3x^2; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$ $\quad$ Жауабы: $4y = x^4 + 4x + 8$

в) $y'' = x + \sin x$ $\quad$ Жауабы: $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1 x + c_2$

г) $y'' = \ln x$ $\quad$ Жауабы: $y = \frac{x^2}{2}\left[\ln x - \frac{2}{3}\right] + c_1 x + c_2$

д) $y''' = \frac{1}{x}$ $\quad$ Жауабы: $y = x^2 \ln\sqrt{x} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

е) $y''' = \cos 2x$ $\quad$ Жауабы: $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

ж) $y'' = \frac{2}{x^3}$ $\quad$ Жауабы: $y = \frac{1}{x} + c_1 x + c_2$

з) $y'' = arctgx$ $\quad$ Жауабы: $y'' = \frac{arctgx}{2}(x^2-1) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + c_1 x + c_2$

и) $y'' = 3e^{\frac{x}{2}} + \cos 3x$ $\quad$ Жауабы: $y = 12e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{9}COS\ 3x + c_1 x + c_2$

2) $F(x, y^{(\kappa)}, y^{(\kappa+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$, у-қатыспаған жағдай $\qquad$ (26)

$y^{(\kappa)} = z$ - ауыстыруы арқылы теңдеудің ретін төмендетуге болады.

$y^{(\kappa+1)} = z'$

$y^{(\kappa+2)} = z''$

.......... .......

$y^n = z^{(n-1)}$

Мысалы: $y'' = y' + x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз:

Шешімі: $y' = z, \quad y'' = z'$ ауыстыруын енгізсек: $z' - z = x$ - сызықтық теңдеу. Бұл теңдеу түрін шешуде $z = uv$, $z' = u'v + uv'$ белгіленуін пайдаланатынбыз; яғни осы берілгенді сызықтық теңдеуге қоямыз:

$u'v + uv' - uv = x$

$u'v + u(v' - v) = x$

$v' - v = 0 \quad (а)$ $\qquad$ $u'v = x \quad (б)$

$v' = v$ $\qquad$ $\frac{du}{dx} e^x = x$

$\frac{dv}{dx} = v \Big| * \frac{dx}{v}$ $\qquad$ $du = \frac{x}{e^x} dx$

$\int \frac{dv}{v} = dx$ $\qquad$ $\int du = \int x e^{-x} dx$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx \qquad U = \left| \begin{array}{l} U_1 = x \\ dU_1 = dx \\ dv = e^{-ч} dx \\ v = -e^{-ч} \end{array} \right| = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1$$

Демек z=uv болғандықтан, әрі $z = y'$ екенін ескерсек:

$y' = (-xe^{-x} - e^{-x} + c_1)e^x = ((-x-1)e^{-x} + c_1)e^x = -x - 1 + c_1 e^x$

y-ті табу үшін екі бөлігін де интегралдау қажет:

$$y = \int (-x - 1 + c_1 e^x) dx = -\frac{x^2}{2} - x + c_1 e^x + c_2$$

Жауабы: $y = -\frac{x^2}{2} - x + c_1 e^x + c_2$

### 3.1.3 Аудиториялық жұмыстар

Берілген теңдеулердің жалпы шешімдерін табыңдар:

а) $xy'' = y'$ $\qquad$ Жауабы: $y = c_1 x_2 + c_2$

ә) $y'' = y' + x$ $\qquad$ Жауабы: $y = c_1 e^x + c_2 - x - \frac{x}{2}$

б) $y'' = \frac{y'}{x} + x$ $\qquad$ Жауабы: $y = \frac{1}{3} x3 + c_1 x^2 + c_2$

в) $(1+x^2) y'' + (y')^2 + 1 = 0$ $\qquad$ Жауабы: $y = (1+c_1^2)\ln|x+c_1| - c_1 x + c_2$

г) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ $\qquad$ Жауабы: $y = (c_1 x - c_1^2) e^{\frac{x}{c_1}+1} + c_2$

### 3.1.8 Дербес үй жұмыстары

Берілген теңдеулердің жалпы немесе дербес шешімдерін табыңдар:

а) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1), \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -1$

д) $y''(x^2+1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

б) $(x-3)y'' + y' = 0$

в) $x(y''+1) + y' = 0$

г) $y'' = \sqrt{1-(y')^2}$

д) $(y''x - y')y' = x^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$

е) $y'' = \frac{y'}{x} + x$

ж) $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$

з) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

и) $y'' = y' + x$

3) $f(y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ , (27)

x- қатыспаған жағдай

$y'=z$ ауыстыруын енгіземіз, келесі туындылардың табылу реті:

$$y''=z'=\frac{dz}{dx}=\frac{dz:dy}{dx:dy}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=y'\frac{dz}{dz}=z\frac{dz}{dy}$$

$$y'''=z(z\frac{d^2z}{d^2y}+(\frac{dz}{dy})^2)$$ т.с.с. жалғасады.

Мысалы: $(y')^2+2yy''=0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі:

$y'=z,\ \ y''=zz'$ ауыстыруын берілген теңдікке қойсақ:

$$z^2+2yzz'=0$$

$$2yzz'=-z^2$$

$$2yz\frac{dz}{dy}=-z^2\Big|*\frac{dy}{2yz^2}$$

$$\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dy}{2y}$$

$$\ln z=-\frac{1}{2}\ln y+\ln c_1$$

екенін ескерсек

$$z=c_1y^{-\frac{1}{2}}\ ,\ z=y'$$

$$y'=c_1y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=c_1y^{-\frac{1}{2}}\Bigg|*\frac{dx}{y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\int y^{\frac{1}{2}}dy=c_1\int dx$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=c_1(x+c_2)$$

$$y^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}c_1(x+c_2)$$

- ізделінді жалпы шешімі

$$y=\left(\frac{3}{2}c_1\right)^{\frac{2}{3}}(x+c_2)^3$$

$$y=c(x+c_2)^{\frac{2}{3}}$$

### 3.1.9 Аудиториялық жұмыстар

Берілген теңдеулердің жалпы шешімдерін табыңыз:

а) $(y'')^2=y'$ Жауабы: $y=\frac{1}{12}(x+c_1)^3+c_2$

ә) $1+(y')^2=2yy'$ Жауабы: $(x+c_2)^2=4c_1(y-c_1)$

б) $(y')^2+2yy''=0$ Жауабы: $y=c_1(x+c_2)$

в) $a^2y''-y=0$ Жауабы: $y=c_1e+c_2e$

г) $y''=\frac{1}{4\sqrt{y}}$ Жауабы: $x=\frac{4}{3}(y-2c_1)\sqrt{y+c_1}+c_2$

д) $yy''+(y')^2=1$ Жауабы: $(x+c_2)^2-y^2=c_1$

е) $yy''=(y')^2$ Жауабы: $y=c_1e^{c2x}$

ж) $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)(y')^2=0$ Жауабы: $(x+c_2)\ln y=x+c_1$

з) $2yy''-3(y')^2=4y^2$ Жауабы: $y\cos^2(x+c_1)=c_2$

3.1.10 Дербес үй жұмыстары

Берілген теңдеулердің жалпы/ дербес шешімдерін табыңыз

à) $1+(y')^2=2yy''$

∂) $yy''-(y')^2=y^3, \quad y(0)=-\frac{1}{2}, \quad y'(0)=0$

á) $y''+ay=b$

â) $yy''-(y')^2=y^4$

ã) $2y(y')^3+y''=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=-3$

ä) $y''(2y+3)-2(y')^2=0$

å) $(y')^2-yy''=1$

æ) $y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$

ç) $2yy''-3(y')^2=4y^2$

è) $y''=\frac{1}{4\sqrt{y}}$

$$4)\quad F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0. \tag{28}$$

y, y′, y″, ... туындыларына қарағанда біртекті теңдеу берілген жағдайда $yy'=p$, $(y')^2=p$, $xy'=p$, $\frac{y'}{y}=p$ ауыстыруларының көмегімен теңдеуді ықшамды түрге келтіруге тырысу қажет. Мұндай жағдайда қарапайым түрлендірулер жасап толық туынды болатындығына көз жеткізуіміз қажет.

Мысалы: $yy''-(y')^2=0$ теңдеудің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $y^2$-қа бөлсек

$$\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2=0$$

$$\frac{y'}{y}=p \Rightarrow p'=\frac{y''y-y'y'}{y^2}=\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2,$$

$$p'=0 \Rightarrow p=c_1 \Rightarrow \frac{y'}{y}=c_1$$

$$\frac{dy}{ydx}=c_1 \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=c_1\int dx \Rightarrow \ln|y|=c_1x+c_2$$

Жауабы: $y=e^{c_1x+c_2}$ - жалпы теңдеуі.

3.1.11 Аудиториялық жұмыстар

Келесі теңдеулердің жалпы шешімін табыңыз.

à) $xyy''+x(y')^2=3yy'$ Жауабы: $y^2=c_1x^4+c_2$

∂) 26 $xy''=y'(e^y-1)$ Жауабы: $y=\ln|c_1x^{c1}/c_2-x^{c1}|$

á) $yy''+(y')^2=x$ Жауабы: $y=\sqrt{1/3x^3+c_1x+c_2}$

â) $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{y}{x^2}=0$ Жауабы: $y=c_1x+c_2/x$

ã) $x^2y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2=0$ Жауабы: $y=c_1xe^{c2/x}$

д) $yy''=y'(2\sqrt{yy'}-y')$ Жауабы: $\ln|y+c_1|+c_1/y+c_1=x+c_2$

3.1.8 Дербес үй жұмыстары

Берілген бастапқы шарт бойынша дербес шешімін табыңыз:

а) $y''(x^2+1)=2xy'$ $\quad y\big|_{x=0}=1$ $\quad y'\big|_{x=0}=3$ Жауабы: $y=x^3+3x+1$

ә) $xy''+x(y')^2-y'=0$ $\quad y\big|_{x=2}=2$ $\quad y'\big|_{x=2}=1$ Жауабы: $x=2+\ln\frac{x^2}{4}$

б) $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$ $\quad y\big|_{x=2}=0$ $\quad y'\big|_{x=2}=4$ Жауабы: $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\frac{16}{5}$

в) $2y'' = 3y^2$ $\quad y\big|_{x=-2} = 1$ $\quad y'\big|_{x=-2} = -1$ $\quad$ Жауабы: $y = \dfrac{4}{(x+4)^2}$

г) $yy'' = (y')^2 - (y')^3;$ $\quad y\big|_{x=1} = 1$ $\quad y'\big|_{x=1} = -1$ $\quad$ Жауабы: $y - x = 2\ln(y)$

д) $y^3 y'' = -1;$ $\quad y\big|_{x=1} = 1$ $\quad y'\big|_{x=1} = 0$ $\quad$ Жауабы: $y = \sqrt{2x - x^2}$

е) $y^4 - y^3 y'' = 1;$ $\quad y\big|_{x=0} = \sqrt{2}$ $\quad y'\big|_{x=0} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ Жауабы: $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$

ж) $y'' = e^{2y}$ $\quad y\big|_{x=0} = 0$ $\quad y'\big|_{x=0} = 1$ $\quad$ Жауабы: $y = -\ln|1 - x|$

з) $(y') = y''(y-1)$ $\quad y\big|_{x=1} = 2$ $\quad y'\big|_{x=1} = -1$ $\quad$ Жауабы: $y = \dfrac{x+1}{x}$

и) $x^4 y'' = (y - xy')^3$ $\quad y\big|_{x=1} = 1$ $\quad y'\big|_{x=1} = 1$ $\quad$ Жауабы: $y = x$ $\quad y = ux$ ауыстыруын енгізіңіз

к) $y'' = xy' + y + 1$ $\quad y\big|_{x=0} = 1$ $\quad y'\big|_{x=0} = 0$ $\quad$ Жауабы: $y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$

### 3.2 Жоғарғы ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Мысалы: $y=ce^{3x}+c_2e^{-3x}$ функциясы $y'' - 2y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімі болатынын көрсетіңіз.

$$y_1 = 3c_1 e^{3x} \qquad y_2 = 3c_1 e^{3x}$$

$$y_1' = 3c_1 e^{3x} \qquad y_2' = -3c_1 e^{-3x}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0 \Rightarrow$$ берілген функция теңдеудің жалпы шешімі

Егер $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ теңдігі және

$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ жалпы шешімі делінсе, мұндағы $y_1(x)$ белгілі болса, онда

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e - \int a_1(x)dx}{y_1^2(x)} \qquad (34)$$

түрінде анықталады.

Мысалы:

$$y'' + \frac{2}{x}y' = 0, \quad y_1(x) = \frac{Sinx}{x}$$

$$y_2(x) = \frac{Sinx}{x}\int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{\frac{Sin^2 x}{x^2}}dx = \frac{Sinx}{x} - \int \frac{x^2 e^{\ln x^{-2}}}{Sin^2 x}x = \frac{Sinx}{x}\int \frac{x^2 x^{-2}}{Sin^2 x}dx = \frac{Sinx}{x}(-ctgx) = -\frac{Cosx}{x}$$

Жауабы: $y = c_1 \dfrac{Sinx}{x} - c_2 \dfrac{Cosx}{x}$ жалпы шешімі.

### 3.3 Жоғарғы ретті біртекті тұрақты коэффиценті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Мысалы

$y'' - 3y + 2y = 0$

$\kappa^2 - 3\kappa + 2 = 0$

$(\kappa - 1)(\kappa - 2) = 0$

$\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 2$

$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$

$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

1) Түбірлері $\kappa_1 = \kappa_{2 \ldots =} \kappa_m$=к-еселі нақты сандар болса

$y=(c_1+c_2x+\ldots+c_mx^{m-1})e^k$ (38)

Мысалы:

$9y'' - 6y' + y = 0$

$9\kappa^2 - 6\kappa + 1 = 0$ $\qquad \kappa_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_{1,i}$

$D = 36 - 4*9 = 0$ $\qquad \kappa_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_{2,i}$

$\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{3}$

$y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{1}{3}x}$

3) Сипаттама теңдеулердің кешенді түбірлері болса , онда

$$y = e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) +^{\alpha_2 x}(C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x); \quad (39)$$

Мысалы:

$y'' + 12y' + 37y = 0$

$k^n + 12k + 37 = 0$

$D = 144 - 4*37 = -4$

$k_{1,2} = -\frac{12 \pm 2i}{2} = -6 \pm i$

$y = e^{-6x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

Мысалы: $y^{1v}+10y'+9y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$, $y''(0)=-9$, $y''(0)=-27$ Коши есебін шешіңіз

Шешімі:

$\kappa^4+10\kappa^2+9=0 \rightarrow \quad \kappa^4=a^2, \quad \kappa^2=a \rightarrow \quad a^2+10a+9=0$

$D=100-4*9=64$

$a_{1,2}=\frac{-10 \pm 8}{2};$

$a_1 = -1, a_2 = -9$

$a^2 = -9$

$a_{1,2} = \pm 3i = 0 \pm 3i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 3$

$a^2 = -1$

$a_{3,4} = \pm i = 0 \pm i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$

$$y = e^{0x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{0x}(C_3 \cos |x + c_4 \sin |x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x - C_3 \sin x + C_4 \cos x$

$y'' = -9C_1 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x - C_3 \cos x - C_4 \sin x$

$y''' = 27C_1 \sin 3x - 27C_2 \cos 3x + C_3 \sin x - C_4 \cos x$

Бастапқы шарттарды қолданамыз:

$1=C_1+C_3 \qquad C_4=0$

$3=3C_2+C_4 \qquad C_3=0$

$-9=-9C_1-C_3$ $\quad C_1=1$

$-27=-27C_2-C_4$ $\quad C_2=1$

*Жауабы:* y=cos3x+sin3x- дербес шешімі.

### 3.3.1 Аудиториялық жұмыстар

Берілген теңдеулерінің жалпы шешімін табыңыз.

а) $y'' + y' - 2y = 0$ Жауабы: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

ә) $y'' - 9y = 0$ Жауабы: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

б) $y'' - 4y' = 0$ Жауабы: $y = c_1 e^{4x} + c_2$

в) $y'' - 2y' - y = 0$ Жауабы: $y = c_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$

г) $3y'' - 2y' - 8y = 0$ Жауабы: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{4}{3}x}$

д) $y'' + y = 0$ Жауабы: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

### 3.3.2 Дербес үй жұмыстары

Берілген теңдеулерінің жалпы шешімін табыңыз.

а) $y'' + 6y' + 13y = 0$ Жауабы: $y = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

ә) $4y'' - 8y' + 5y = 0$ Жауабы: $y = e^{x}(c_1 \cos\frac{x}{2} + c_2 \sin\frac{x}{2})$

б) $y'' - 2y' + y = 0$ Жауабы: $y = e^{x}(c_1 + c_2 x)$

в) $\dfrac{4d^2x}{dt^2} - 20\dfrac{dx}{dt} + 25x = 0$ Жауабы: $x = (c_1 + c_2 +)e^{2,5t}$

г) $2y'' + y' + 2\sin^2 15^o \cos^2 \cdot 15^o \cdot y = 0$ Жауабы: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{1}{4}x}$

д) $y'' - 4y' + 3y = 0$ $\quad y\big|_{x=0} = 6$ $\quad y'\big|_{x=0} = 10$ Жауабы: $y = 4e^{x} + 2e^{3x}$

е) $y'' + 4y' + 29y = 0$ $\quad y\big|_{x=0} = 0$ $\quad y'\big|_{x=0} = 15$ Жауабы: $y = 3e^{-2x}\sin 5x$

ж) $4y'' + 4y' + y = 0$ $\quad y\big|_{x=0} = 2$ $\quad y'\big|_{x=0} = 0$ Жауабы: $y = e^{-\frac{x}{2}}(2 + x)$

## 3.4 Жоғарғы ретті біртекті емес тұрақты коэффициентті сызықтық диференциалдық теңдеулер

<u>Мысалы</u>*:* $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

<u>Шешуі</u>*:* $y = \overline{y} + \overset{*}{y}$

$1)\ \overline{y} = ?$

$y^{IV} = k^4,\ y'' = k^2 \Rightarrow k^4 + 8k + 16 = 0$

$(k^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow k^2 = -4$

$k_{1,2} = \pm 2i$

$k_{3,4} = \pm 2i$

$k_1 = 2i \Rightarrow y_1 = \cos 2x$

$k_2 = -2i \Rightarrow y_2 = \sin 2x$

$k_3 = 2i \Rightarrow \; y_3 = x\cos 2x$

$k_4 = -2i \Rightarrow \; y_4 = x\sin 2x$

$\overline{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4$

$\overline{y} = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3 x\cos 2x + c_4 x\sin 2x$

$2)\ \overset{*}{y} = ?$ демек кесте бойынша:

$f(x) = \cos x$

$\alpha + \beta i = 0 + i = i \neq k_1, k_2, k_3, k_4,$

$\overset{*}{y} = A\cos x + B\sin x$

$(\overset{*}{y})' = -A\sin x + B\cos x$

$(\overset{*}{y})'' = -A\cos x - B\sin x$

$(\overset{*}{y})''' = A\sin x - B\cos x$

$(\overset{*}{y})^{'v} = A\cos x + B\sin x$

Осы табылған туындыларды бастапқы берілген теңдікке қоямыз:
A$\cos x$+B$\sin x$+8(-A$\cos x$-B$\sin x$)+16(A$\cos x$+B$\sin x$)=$\cos x$

$$\begin{array}{l|l} \cos x: & A - 8A + 16A = 1 \Rightarrow \; A = \dfrac{1}{9} \\ \sin x: & B - 8B + 16B = 0 \Rightarrow \; B = 0 \end{array}$$

А мен В мәндерін $\overset{*}{y}$ -ны анықтау өрнегіне қоямыз:

$\overset{*}{y} = \dfrac{1}{9}\cos x$

Демек, $y = \overline{y} + \overset{*}{y} = (c_1 + c_3 x)\cos 2x + (c_2 + c_4 x)\sin 2x + \dfrac{1}{9}\cos 2x$

### 3.4.1 Аудиториялық жұмыстар

Берілген теңдеулердің жалпы шешімін табыңыз:

а) $2y'' + y' - y = 2e^x$ Жауабы: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x$

ә) $y'' + a^2 y = e^x$ Жауабы: $y = c_1\cos ax + c_2\sin ax + \dfrac{e^x}{a^2 + 1}$

б) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$ Жауабы: $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{x\frac{5\sin x + 7\cos x}{74}}$

в) $y'' + 2y' + 5y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x$ Жауабы: $y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) - \dfrac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x$

г) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$ Жауабы: $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{11}{27}$

д) $y'' - 2y' + 2y = 2x$ Жауабы: $y = e^{x((c_1\cos x + c_2\sin x) + x) - 1}$

е) $y'' + 4y' - 5y = 1$ Жауабы: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - 0{,}2$

**ж)** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$ Жауабы: $y = e^x\,(C_1 + C_2\, x - \ln\sqrt{x^2 + 1} + x\,\mathrm{arctg}x)$

### 3.4.2 Дербес үй жұмыстары

Егер $f(x)$ функциясы берілсе, онда берілген теңдеулердің жалпы шешімін анықтаңыз.

1. $y''-3y'+2y=f(x)$, мұнда $f(x)$ келесі функциялар түрінде берілген:

а) $10e^{-x}$

ә) $3e^{2x}$

б) $2\sin x$

в) $2x^3-30$

г) $2e^{x}\cos\frac{x}{2}$

д) $x-e^{-2x}+1$

е) $e^{x}(3-4x)$

ж) $3x+5\sin 2x$

з) $2e^{x}-e^{-2x}$

и) $\sin x\sin 2x$

к) $shx$

Жауабы: $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+\bar{y}$, мұнда $\bar{y}$ тең:

а) $\frac{5}{3}e^{-x}$

ә) $3xe^{2x}$

$\acute{a}$) $\frac{5}{3}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$

в) $x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$

г) $-\frac{8}{5}e^{x}\left[\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right]$

д) $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$

е) $e^{x}(2x^2+x)$

ж) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\sin 2x)$

з) $-2xe^{x}-\frac{1}{12}e^{-2x}$

и) $\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\sin x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\sin 3x$

к) $-\frac{1}{12}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{x}$

2. $2y''+5y'=f(x)$, егер $f(x)$ тең:

а) $5x^2-2x-1$

ә) $e^{x}$

б) $29\cos x$

в) $\cos^2 x$

г) $0{,}1e^{-2{,}5x}-25\sin 2{,}5x$

д) $29x\sin x$

е) $100x\cdot e^{-x}\cdot\cos x$

ж) $3\mathrm{ch}\frac{5}{2}x$

Жауабы: $y=c_1+c_2e^{-\frac{5}{2}x}+\bar{y}$, мұнда $\bar{y}$ тең:

а) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$

ә) $\frac{1}{7}e^{x}$

б) $5\sin x-2\cos x$

в) $\frac{1}{10}x+\frac{5}{104}\sin 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$

г) $\cos 2{,}5x+\sin 2{,}5x-0{,}02xe^{-2{,}5x}$

д) $(-2x-\frac{16}{29})\cos x-(2x-\frac{185}{29})\sin x$

е) $e^{-x}\left[(10x+18)\sin x-(20x+1)\cos x\right]$

ж) $\frac{3}{10}(\frac{1}{5}e^{\frac{5}{2}x}-xe^{-\frac{5}{2}x})$

3. $y''-4y'+4y=f(x)$, егер f(x) тең:

а) 1

ә) $e^{-x}$

б) $3e^{2x}$

в) 2(sin2x+x)

г) sinxcos2x

д) $\sin^3 x$

е) $8(x^2+e^{2x}+\sin 2x)$

ж) sh2x

з) shx+sinx

и) $e^{x}$-sh(x-1)

Жауабы: $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\bar{y}$, мұнда $\bar{y}$ тең:

а) $\frac{1}{4}$

ә) $\frac{1}{9}e^{x}$

б) $\frac{3}{2}x^{2}e^{2x}$

в) $\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

г) $\frac{1}{169}\left(\frac{5}{2}\sin 3x+6\cos 3x\right)-\frac{1}{50}(3\sin x+4\cos x)$

д) $\frac{3}{100}(3\sin x+4\cos x)+\frac{1}{676}(5\sin 3x-12\cos 3x)$

е) $2x^{2}+4x+3+4x^{2}e^{2x}+\cos 2x$

ж) $\frac{1}{4}\left(x^{2}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$

з) $\frac{1}{2}\left(e^{x}-\frac{1}{9}e^{-x}\right)+\frac{1}{25}(3\sin x+4\cos x)$

и) $e^{x}-\frac{1}{2}e^{x-1}+\frac{1}{18}e^{1-x}$

4. $y''+y=f(x)$, егер $f(x)$ тең:

а) $2x^{3}-x+2$

ә) $-8\cos 3x$

б) $\cos x$

в) $\sin x-2e^{-x}$

г) $\cos x 2x$

д) $24\sin^{4}x$

е) $\operatorname{ch} x$

Жауабы: $y=C_1\mathrm{COS}x+C_2\sin x+\bar{y}$, мұнда $\bar{y}$ тең:

а) $2x^{3}-13x+2$

ә) $\cos 3x$

б) $\frac{1}{2}x\sin x$

в) $-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$

г) $\frac{1}{4}\left(x\sin x-\frac{1}{4}\cos 3x\right)$

д) $9+4\cos 2x-0{,}2\cos 4x$

е) $0{,}5\operatorname{ch} x$

ж) $0{,}5+0{,}1\operatorname{ch} 2x$

5. $5y''-6y'+5y=f(x)$, егер $f(x)$ тең:

а) $5e^{3x/5}$

ә) $\sin\frac{4}{5}x$

б) $e^{2x}+2x^{3}-x+2$

в) $e^{3x/5}\cos x$

г) $e^{3x/5}\sin\frac{4}{5}x$

д) $13e^{x}\operatorname{ch} x$

5. Жауабы: $y=e^{3x/5}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)+\bar{y}$, мұнда $\bar{y}$ тең:

а) $\frac{25}{16}e^{3x/5}$

ә) $\frac{15}{219}\sin\frac{4}{5}x+\frac{40}{219}\cos\frac{4}{5}x$

б) $\frac{1}{13}e^{2x}+\frac{1}{5}\left(2x^{3}+\frac{36}{5}x^{2}+\frac{107}{25}x-\frac{1118}{125}\right)$

в) $-\frac{5}{9}\cos x\, e^{3x/5}$

г) $-\frac{1}{8}x\, e^{3x/5}\cos\frac{4}{5}x$

д) $0{,}5e^{2x}+1{,}3$

**3.5 Жоғарғы ретті біртекті емес тұрақты коэффициентті теңдеулерді шешудің Лагранж әдісі**

Мысалы : $Y^{II}+У=-ctg^2 x$

Шешімі : $Y^{II}+У=0 \Rightarrow K^2+1=0 \Rightarrow K^2=-1$, $K_{1,2}=\pm i$

$$\alpha+\beta_i=0\pm i\Rightarrow \alpha=0,\beta=1.$$

Кесте бойынша шешімін іздейміз.

$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$ теңдеудің жалпы шешімі .

$Y=C_1(X)\cos x+C_2(X)\sin x$

$C_1(X),C_2(X)$-?

$$\begin{cases} C_1^I(X)COSX+C_2^I(X)SINX=0 \\ C_1^I(SINX)+C_2^I COSX=-CTG^2X \end{cases} \ldots.. \left| \begin{matrix} SINX \\ COSX \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} C_1^I COSX*SINX+C_2^I SINX*COSX \\ -C_1^I SINX*COSX+C_2^I COS^2X=-\dfrac{COS^3X}{SIN^2X} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2^I(SIN^2X+COS^2X)=-\frac{COS^3X}{SIN^2X}$$

$$C_2^I=-\frac{COS^3X}{SIN^2X}$$

$$C_2=-\int\frac{COS^3X}{SIN^2X}dx=-\int\frac{COS^2X*COSX}{SIN^2X}dx=-\int\frac{(1-SIN^2X)d(SINX)}{SIN^2X}=\int d(SINX)-\int\frac{d(SINX)}{SIN^2X}=$$

$$=SINX+\frac{1}{SINX}+A.$$

$$\begin{cases} C^I{}_1\cos x+C^I{}_2\sin x=0 & /\cos x \\ -C^I{}_1\cos^2 x+C^I{}_2\cos x=-ctq^2x & /(-\sin x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C^I{}_1\cos^2 x+C^I{}_2\sin x\cos x=0 \\ C^I{}_1\sin x-C^I{}_2\sin x\cos x=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} \end{cases}$$

$$C^I{}_1=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$,,,C_1=\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)dx=\ln\left|tq\frac{x}{2}\right|+\cos x+B$$

$C_1$ мен $C_2$ мәндерін (x) өрнегіне қойсақ

$$y=[\ln\left|tq\frac{x}{2}\right|+\cos x+B]\cos x+\left[\sin x+\frac{1}{\sin x}+A\right]\sin x$$

Жауабы: $y=B\cos x+A\sin x+2+\cos x\ln\left|tq\frac{x}{2}\right|$

3.5.1 Аудиториялық жұмыстар

Берілген теңдеулердің жалпы шешімін табыңыз.

а) $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$ Жауабы: $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{2x}-x-4$.

ә) $y'''-3y'+2y=e^{-x}(4x^2+4x-10)$ Жауабы: $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{-2x}+(x^2+x-1)e^{-x}$

б) $y^{IV}+8y''+16y=\cos x$ Жауабы: $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x+$ $+1/9\cos x$

в) $y^{IV}+2\alpha^2y''+\alpha^4y=\cos\alpha x$ Жауабы: $y=(C_1+C_2x)\cos\alpha x+(C_3+C_4x)\sin\alpha x-$ $-x^2\cos\alpha x/8\alpha^2$

г) $y^V+y'''=x^2-1$ Жауабы: $y=1/60x^5-1/2x^3+C_1x^2+C_2x+C_3+C_4\cos x+$ $+C_5\sin x$

д) $y^{IV}-y=xe^x+\cos x$ Жауабы: $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\sin x+C_4\cos x+x^2-3x/8*$

$*e^x - 1/4\ x \sin x$

### 3.5.2 Дербес үй жұмыстары

Берілген теңдеулердің жалпы шешімін табыңыз.

а) $y^{IV} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\sin x + \cos x)$ Жауабы: $y = (C_1 + C_2 x + x^2)e^x + (C_3 +$
$+ C_4 x + x^2)e^{-x} + \sin x + \cos x$

ә) $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0; y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 1, y''|_{x=0} = 1$ Жауабы: $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$

б) $y''' - y' = 3(2 - x); y|_{x=0} = y'|_{x=0} = y''|_{x=0} = 1$ Жауабы: $y = e^x + x^3$

в) Эйлер теңдеуін шешіңіз $x^3 y''' + xy' - y = 0$ Жауабы: $y = x(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x|)$

$$a)\ y = Ce^{\frac{1}{x}},\quad x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2$$

$$y = \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{20}\cos 2x - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2,\quad y'' + 4y' = \cos 2x$$

$$\partial)\ y = xe^{cx},\quad y'x = (1 + \ln y - \ln x)y$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 3x,\quad y'' + y' = 2x - 1$$

$$á)\ y = C(x + 1),\quad y - xy' = 1 + x^2 y'$$

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln x + C_2,\quad x(y'' + 1) + y' = 0$$

$$â)\ y = Ce^{-2x},\quad y' + 2e^x y = 2e^{-x}$$

$$y = 2x + C_1 \sin x + C_2,\quad y'' ctgx + y' = 2$$

$$ã)\ y = Cx + e^x,\quad xy' - y + e^x = 0$$

$$y = C_1 \ln + \frac{1}{9x^3} + C_2,\quad x^5 y'' + x^4 y' = 1$$